Statistiská fyzika — cvičení, LS 2005/2006

Řešení domácí úlohy 1:

1) Všechny možné realizace vstřelení n gólů za čas $t + \mathrm{d}t$ můžeme rozdělit na dvě množiny podle toho, zda poslední gól padl v intervalu $(t, t+\mathrm{d}t)$ nebo někdy dříve. Pravděpodobnost toho, že Vítkovice vstřelí gól za čas $\mathrm{d}t$ je podle zadání $\alpha\mathrm{d}t$ takže dostáváme

$$\begin{aligned} p_n(t + \mathrm{d}t) &= p_n(t)(1 - \alpha\mathrm{d}t) + p_{n-1}(t)\alpha\mathrm{d}t, \\ \dot{p}_n(t) &= \alpha(p_{n-1}(t) - p_n(t)). \end{aligned}$$

Po Fourierově transformaci a jednoduché úpravě

$$\widehat{p}_n(\omega) = \left(\frac{\alpha}{\mathrm{i}\omega + \alpha}\right)^n$$

Pomocí reziduové věty spočteme inverzní transformaci a dostáváme Poissonovo rozdělení (na tomto místě jsme provedli drobné přeznačení a dále budeme namísto $p_n(t)$ psát $p_n(\alpha t)$ a analogicky pro druhý tým)

$$p_n(\alpha t) = \frac{(\alpha t)^n}{n!} \exp(-\alpha t).$$

K tomuto výsledku můžeme dospět také řešením integrálních rovnic pro veličiny $p_n(\alpha t)$ nebo použitím aproximace diskrétního času a provedením příslušné limity binomického rozdělení.

2) Pravděpodobnost výhry Sparty po čase t je dána vztahem (sčítáme přes všechna vítězná skóre)

$$p_{\mathrm{win}}(\alpha, \beta, t) = \sum_{n>m} p_m(\alpha t)\, p_n(\beta t).$$

Pro požadované odhady stačí sečíst několik prvních členů a výsledky stanovit numericky. Pro zadané α, β je pravděpodobnost výhry Sparty $24,7\%$ a její vedení je nejpravděpodobnější v čase 37 min 51 s. Graf funkce $p_{\mathrm{win}}(t)$ vidíme na obrázku 1.

3) Pokud Sparta prohrává v čase T před koncem, může obecně setrvat čas t při hře 5 na 5 a pokud za tuto dobu nesrovná skóre, dohraje zbytek utkání, tedy čas $T - t$, bez brankáře (musíme si uvědomit, že vzhledem k hodnotám c_5, a c_6 je power-play nevýhodná, pokud se B snaží pouze udržet remízu). Gólman pak musí opustit klec v takovém čase T, při kterém už se nevyplatí čekat libovolný čas t.

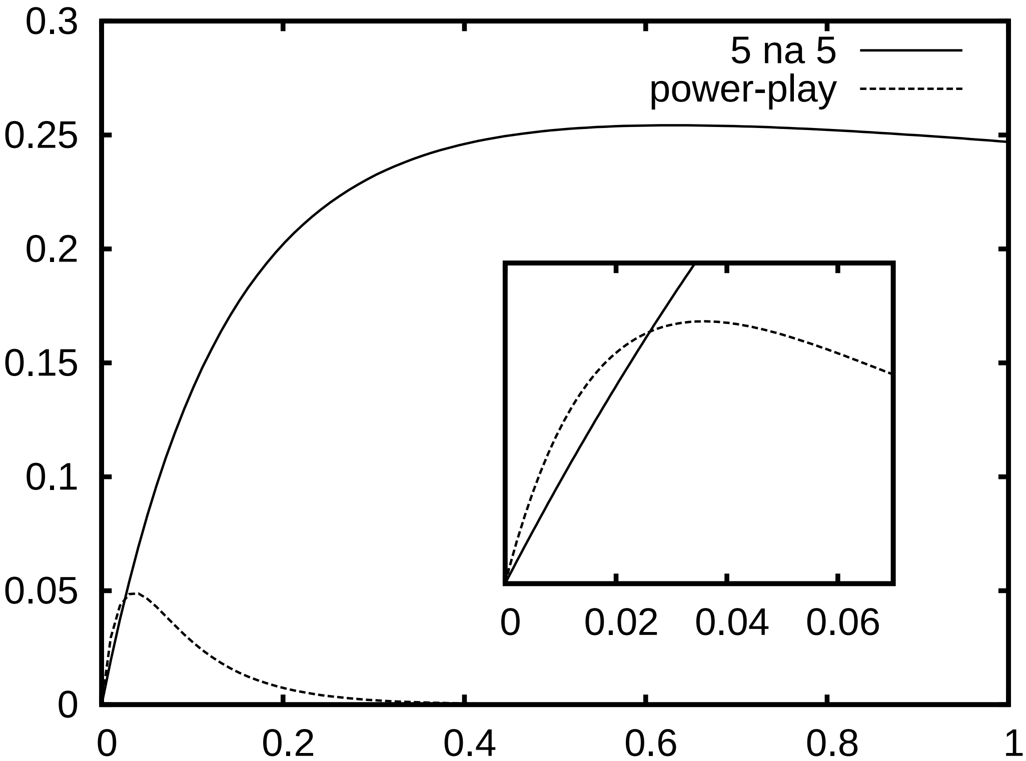
Pravděpodobnost výhry Sparty v čase T je při infinitezimální čekací době $\mathrm{d}t$ dána vztahem

$$p_{\mathrm{win}}(T, \mathrm{d}t) = p_0(\alpha T)\,\beta\,\mathrm{d}t + (1 - (\alpha + \beta)\,\mathrm{d}t)\, p_{\mathrm{win}}(c_5\alpha,\ c_6\beta,\ T - \mathrm{d}t)$$

Hledáme takové T, aby $p_{\mathrm{win}}(T, \mathrm{d}t) = p_{\mathrm{win}}(T, 0)$, tedy

$$p_0(\alpha T)\,\beta + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(1 - (\alpha + \beta)\,t)\, p_{\mathrm{win}}(c_5\alpha,\ c_6\beta,\ T - t)\right]\Big|_{t=0} = 0.$$

Numerickým řešením dostáváme $T = 38$ s.



Obrázek 1: Pravděpodobnost výhry Sparty v závislosti na čase zbývajícím do konce utkání při hře 5 na 5 a při power-play. Okolí počátku je zvětšeno ve výřezu.